ГЛАВА 8. РЯДЫ.

§ 1. Числовые ряды.

Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, где $u_1, u_2, \ldots$ - последовательность чисел, называется *числовым рядом* и обозначатся $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ называется *остатком* n*-ого порядка* исходного ряда и обозначается r_n. Сумма $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ n первых членов ряда называется n*-ой частичной суммой* ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ и *расходящимся*, если предел не существует. Число S называется *суммой сходящегося ряда,* при этом пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится его остаток r_n. В случае сходящегося ряда его остаток записывают в виде $r_n = S - S_n$.

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ (*необходимый признак сходимости ряда)*. Обратное утверждение неверно.

Если $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (*достаточный признак расходимости ряда*).

Признак сравнения. Если для рядов $U : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $V : \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, начиная с некоторого n_0, для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $0 \leq u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда V следует сходимость ряда U, из расходимости ряда U следует расходимость ряда V.

Предельный признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ (в частности, если $u_n \sim v_n$ при $n\to\infty$), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ($u_n > 0$, $v_n > 0$ начиная с некоторого n_0) сходятся или расходятся одновременно.

Для применения признаков сравнения необходимо наличие «эталонных» рядов, сходимость или расходимость которых известна. В качестве «эталонных» рядов широко используются: **1)** *обобщённый гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$; **2)** *геометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, который сходится при $0\le q<1$, при этом его сумма равна $S=\frac{1}{1-q}$ и расходится при $q\ge 1$. Таким образом, для применения признаков сравнения нужно найти последовательность $\frac{A}{n^p}$ или Bq^n, где A, B - некоторые числа, такую, что $u_n \sim \frac{A}{n^p}$ или $u_n \sim Bq^n$ при $n\to\infty$.

Полезно иметь в виду эквивалентности (при $n\to\infty$, $p>0$):

$$\sin\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim tg\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim \arcsin\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim arctg\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right) \sim \frac{1}{n^p},$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n},$$

а также оценки $(\ln n)^{\alpha}\le n^{\beta}\le a^n\le n!\le n^n$ ($\alpha>0, \beta>0, a>1$), имеющие место, начиная с некоторого n_0, для всех $n\ge n_0$.

В задачах 8.1-8.9 показать, что следующие ряды сходятся, и найти их суммы:

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. **8.2** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. **8.3** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

8.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. **8.5** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **8.6** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}$.

8.7 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n^2-1)}$. **8.8** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. **8.9** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$.

В задачах 8.10-8.18 используя необходимый признак сходимости ряда, установить расходимость следующих рядов:

8.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+3}$. **8.11** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. **8.12** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

8.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+2}{4}$. **8.14** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50}$. **8.15** $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\left(\frac{2}{n}\right)$.

8.16 $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\right)$. **8.17** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$. **8.18** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

В задачах 8.19-8.46 используя признаки сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

8.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. **8.20** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$. **8.21** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

8.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$. **8.23** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}$. **8.24** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

8.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+\sqrt{n}}$. **8.26** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$. **8.27** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

8.28 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$. **8.29** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})}$. **8.30** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.

8.31 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$. **8.32** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

8.33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. **8.34** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$.

8.35 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$. **8.36** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$. **8.37** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$.

8.38 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)3^n}$. **8.39** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2(2^n+1)}$. **8.40** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

8.41 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$. **8.42** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$. **8.43** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n^2}\right)$.

8.44 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. **8.45** $\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{\pi}{4n}\right)$. **8.46** $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 tg^6\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$ начиная с некоторого n_0) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, то ряд сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$. Если $L=1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

В задачах 8.47-8.62 используя признак Даламбера, исследовать сходимость следующих рядов:

8.47 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$. **8.48** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$. **8.49** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$. **8.50** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n3^n}$. **8.51** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$. **8.52** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$. **8.53** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. **8.54** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$. **8.55** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{8^n\cdot n^2}$. **8.56** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. **8.57** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. **8.58** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

8.59 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. **8.60** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$.

8.61 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. **8.62** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot tg\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Признак Коши (радикальный). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ($u_n>0$ начиная с некоторого n_0) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$, то ряд сходится при $L<1$ и расходится при $L>1$. Если $L=1$, то ряд может сходится или расходится; в этом случае его сходимость исследуется с помощью других признаков.

При применении признака Коши полезно иметь в виду, что: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_m(n)}=1$, где $P_m(n)$ - многочлен порядка m относительно n.

В задачах 8.63-8.74 используя радикальный признак Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

8.63 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$. **8.64** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^{n}$. **8.65** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

8.66 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$. **8.67** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{\ln n})^{n}}$. **8.68** $\sum_{n=3}^{\infty}\arcsin^{n}\left(\frac{3}{n}\right)$.

8.69 $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^{n}\left(\frac{n}{3}\right)$. **8.70** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **8.71** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

8.72 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **8.73** $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$. **8.74** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

Интегральный признак Коши. Если $u_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \geq n_0 \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

В задачах 8.75-8.80 используя интегральный признак Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

8.75 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$. **8.76** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-4}$. **8.77** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

8.78 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **8.79** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. **8.80** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$.

В задачах 8.81-8.100 исследовать сходимость рядов:

8.81 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$. **8.82** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$. **8.83** $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$.

8.84 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. **8.85** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$. **8.86** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}$.

8.87 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2}\cdot arctg\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **8.88** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^2}$.

8.89 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. **8.90** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **8.91** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

8.92 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2-\sin n}{\sqrt[3]{n^3-1}}$. **8.93** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$. **8.94** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

8.95 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{(n+2)!}$. **8.96** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ **8.97** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$

8.98 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2\cdot 2^n}$. **8.99** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$. **8.100** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(\cos n)^2}{n^2+5}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при перестановке членов ряда. Сумму условно сходящегося ряда путём перестановки его членов можно сделать равной любому числу.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он является сходящимся (*достаточный признак сходимости знакопеременного ряда*).

Для исследования ряда на абсолютную сходимость используют известные признаки сходимости знакоположительных рядов. В частности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1$. В общем случае из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Но если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, то расходится не только ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, но и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд называется *знакочередующимся*, если все его соседние члены имеют разные знаки.

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ($u_n > 0$) выполнены условия: **1)** $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ (может начать выполняться начиная с некоторого n_0); **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакочередующийся ряд сходится (по крайней мере условно). Для остатка ряда r_n в этом случае справедлива оценка $|r_n| \le u_{n+1}$.

Сумму знакочередующегося ряда с заданной степенью точности ε вычисляют по приближённой формуле $S \approx S_{n_0} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n_0+1} u_{n_0}$, где n_0 - минимальный из номеров n, для которых $u_{n+1} < \varepsilon$.

В задачах 8.101-8.120 исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

8.101 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$. **8.102** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^5}}$. **8.103** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n-1}$.

8.104 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^n}$ **8.105** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(4n+1)^n}$ **8.106** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^3 n}$.

8.107 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$ **8.108** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n^2}$ **8.109** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^n}$.

8.110 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$. **8.111** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

8.112 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$. **8.113** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$. **8.114** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

8.115 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. **8.116** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. **8.117** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n$.

8.118 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{10}}{2^n}$. **8.119** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n\sqrt{n}}$. **8.120** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n n!}{2^n n^n}$.

В задачах 8.121-8.124 вычислить сумму ряда с точностью до $\varepsilon = 10^{-2}$. Сколько членов ряда следует для этого взять?

8.121 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ **8.122** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n^2+1}$ **8.123** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$ **8.124** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2 2^n}$.

§2.Функциональные ряды.

Выражение вида $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, где $u_1(x), u_2, (x) \ldots$ - последовательность функций, определённых на одном и том же множестве $D \subset R$, называется *функциональным рядом,* определённым на D и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Функция $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ называется n*-ой частичной суммой* функционального ряда.

Точка $x_0 \in D$, в которой сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, называется *точкой сходимости* функционального ряда. Множество $D_0 \subset D$, состоящее из всех точек сходимости функционального ряда, называется его *областью сходимости.* Область D_0 сходимости функционального ряда обычно уже, чем область его определения D.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на множестве D^{*}, если при всех $x \in D^{*}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Всякий ряд, абсолютно сходящийся на множестве D^{*}, сходится на этом множестве. Область D^{*} абсолютной сходимости ряда обычно уже его области сходимости D_0.

Функцию $S(x)$, определённую в области сходимости D_0 функционального ряда такую, что при любом фиксированном

$x \in D_0$ $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, называют *суммой ряда* и пишут $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. При $x \in D_0$ остаток ряда представляет собой также функцию $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $x \in D_0$.

Для нахождения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ применяют известные признаки сходимости числовых рядов, считая $x \in D$ фиксированным.

В частности, на основании признаков Даламбера и Коши (радикального) можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = L(x) < 1$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x) < 1$, соответственно, и расходится, если $L(x) > 1$. В точках x, в которых $L(x) = 1$, сходимость ряда исследуют с помощью других признаков (например, признаков сравнения, интегрального признака Коши, признака Лейбница) .

В задачах 8.125-8.139 найти области сходимости следующих функциональных рядов:

8.125 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$. **8.126** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}$. **8.127** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

8.128 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+1)^n}$. **8.129** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$. **8.130** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)x^{2n}}$.

8.131 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. **8.132** $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$. **8.133** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

8.134 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n tg\left(\frac{x}{2^n}\right)$. **8.135** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$. **8.136** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

8.137 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x$. **8.138** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x\ln^n x}$. **8.139** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$.

§ 3. Степенные ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$, где a_i, x_0 - действительные числа. Числа a_i называются *коэффициентами* ряда.

Всякий степенной ряд сходится в точке $x = x_0$.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется число R такое, что при $|x-x_0| < R$ ряд сходится (и притом абсолютно), а при $|x-x_0| > R$ расходится. Интервал (x_0-R, x_0+R) при этом называется *интервалом сходимости* ряда. На концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = x_0 \pm R$, ряд может как сходится, так и расходится.

Областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости (x_0-R, x_0+R), к которому присоединяются точки $x_0 \pm R$, если в них ряд сходится. В частности, радиус сходимости R может быть равен 0, тогда область сходимости ряда состоит из одной точки x_0, и $+\infty$, тогда областью сходимости ряда является вся числовая прямая.

Интервал сходимости (x_0-R, x_0+R) определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши (радикального), вычисляя пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = L(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x)$ и решая неравенство $L(x) < 1$.

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ можно найти, вычислив его радиус сходимости по формулам $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (указанными формулами нельзя пользоваться, если степенной ряд содержит члены только с чётными или только нечётными степенями $(x - x_0)$).

В задачах 8.140-8.160 найти область сходимости следующих степенных рядов:

8.140 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. **8.141** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. **8.142** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

8.143 $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$. **8.144** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. **8.145** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$.

8.146 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$. **8.147** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^n}$. **8.148** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

8.149 $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. **8.150** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n5^n}$. **8.151** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

8.152 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n!}{(2n)!}$. **8.153** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. **8.154** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$.

8.155 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. **8.156** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 3^{2n}}$. **8.157** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n}}{(n+1)\cdot 4^{n}}$. **8.158** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n}x^{2n}}{4n^{2}}$. **8.159** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n}}{3^{n}n(\ln n)^{3}}$. **8.160** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(x+2)^{n}}{n^{3}\cdot 2^{n}}$.

Внутри общего интервала сходимости (x_0-R, x_0+R) степенные ряды можно почленно складывать и вычитать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n.$$

Внутри интервала сходимости (x_0-R, x_0+R) степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости:

1) $$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1};$$

2) $$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)}+C.$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x=x_0$. При $x_0=0$ ряд Тейлора называется *рядом Маклорена:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots.$$

Представление функции $f(x)$ в виде $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, называется разложением $f(x)$ в ряд Тейлора. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда остаток ряда $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \to 0$ при $n \to \infty$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, входящей в интервал сходимости ряда. Для оценки остатка ряда Тейлора часто пользуются формулой $r_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$, где $0 < \theta < 1$.

При разложении функций в степенные ряды, как правило, используют основные разложения элементарных функций в ряд Маклорена (*Приложение 5*). Иногда при разложении используют почленное дифференцирование или интегрирование. При разложении в степенные ряды рациональных дробей рекомендуется представлять их в виде суммы простейших дробей.

В задачах 8.161-8.178 используя основные разложения элементарных функций (*Приложение 5*), а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд Маклорена и указать интервалы сходимости полученных рядов.

8.161 $x^2 e^{-2x}$. **8.162** $\frac{e^x - 1}{x}$. **8.163** $x^3 \cos x$.

8.164 $\sin^2 x$. **8.165** shx. **8.166** $x\ln(1 + x^2)$.

8.167 $\ln(5 + 2x)$. **8.168** $\ln\frac{1 + 3x}{1 - 3x}$. **8.169** $\ln(x^2 + 3x + 2)$.

8.170 $\frac{1}{1 + x^4}$. **8.171** $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. **8.172** $\sqrt[3]{27 + x}$.

8.173 $\frac{x}{4 + x^2}$. **8.174** $\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$. **8.175** $\int_0^x e^{-x^2/2} dx$.

8.176 $\int_0^x \frac{\sin(x^2)dx}{x}$. **8.177** $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. **8.178** $\arcsin x$.

В задачах 8.179-8.186 вычислить указанные выражения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

8.179 $\sqrt{15}$**.** **8.180** $\sqrt[4]{17}$**.** **8.181** $\sqrt[3]{520}$**.** **8.182** e^{-1}**.**

8.183 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$**.** **8.184** $\ln 1.2$**.** **8.185** $\cos 10^{\circ}$**.** **8.186** $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$**.**

8.187 Пользуясь тождеством $\pi/4 = arctg(1/2) + arctg(1/3)$ вычислить число π с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

В задачах 8.188-8.193 вычислить следующие интегралы с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

8.188 $\int\limits_0^1 \cos(x^2)dx$**.** **8.189** $\int\limits_0^2 \dfrac{\sin x}{x}dx$**.** **8.190** $\int\limits_0^{0.5} \dfrac{arctgx}{x}dx$**.**

8.191 $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$**.** **8.192** $\int\limits_0^{0.8} x^{10}\sin x dx$**.** **8.193** $\int\limits_0^{1/3} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$**.**

§4. Ряды Фурье. Интегралы Фурье.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\ell, \ell]$ называется функциональный ряд вида $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$, где числа a_n и b_n, называемые *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ на интервалы $(\alpha, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, \beta)$ так, что на каждом из интервалов функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\ell, \ell]$ кусочно-монотонна и непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, то во всякой точке $x \in (-\ell, \ell)$, в которой $f(x)$ непрерывна, функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$. В точках разрыва $x \in (-\ell, \ell)$ функции $f(x)$ и точках $x = \pm\ell$ сумма ряда Фурье определяется формулами $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ и $S(-\ell) = S(\ell) = \frac{f(-\ell+0) + f(\ell-0)}{2}$.

В частности, если: **1)** функция $f(x)$ - *чётная*, то в точках $x \in (-\ell, \ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right)$,где $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) функция $f(x)$ - *нечётная*, то в точках $x \in (-\ell, \ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$, где $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$, $n = 1,2,\ldots$.

Если функция $f(x)$ задана только в интервале $(0, \ell)$, то её можно продолжить в интервал $(-\ell, 0)$ либо как чётную, либо как нечётную, а затем разложить её в интервале $(0, \ell)$ в неполный ряд Фурье по синусам или по косинусам.

В задачах 8.194-8.202 разложить следующие функции в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$:

8.194 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$. **8.195** $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x \le 0 \\ 3 & 0 < x < \pi \end{cases}$.

8.196 $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x \le 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$. **8.197** $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$.

8.198 $f(x)=2x+3$. **8.199** $f(x)=x-\pi$. **8.200** $f(x)=x^2$.

8.201 $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ \sin x & 0<x<\pi\end{cases}$. **8.202** $f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi<x\le 0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$.

В задачах 8.203-8.206 разложить функции в ряд Фурье в интервале $(-l,l)$:

8.203 $f(x)=x,\quad l=4$. **8.204** $f(x)=|x|,\quad l=2.$

8.205 $f(x)=\begin{cases}1 & -1<x\le 0\\ -1 & 0<x<1\end{cases}$. **8.206** $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x\le 0\\ x & 0<x<1\end{cases}$.

В задачах 8.207-8.210 разложить функции в неполные ряды Фурье в интервале $(0,l)$: **а)** по косинусам, **б)** по синусам.

8.207 $f(x)=x+\pi/2,\ x\in(0,\pi)$. **8.208** $f(x)=\pi/2-x,\ x\in(0,\pi)$.

8.209 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$ **8.210** $f(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1,\\ 2-x & 1<x<2.\end{cases}$

Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на $R=(-\infty,+\infty)$, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке числовой прямой, и существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$.

Если функция $f(x)$ на любом отрезке числовой прямой кусочно-монотонна и непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, а также абсолютно интегрируема на R, то в каждой точке $x\in(-\infty,+\infty)$, в которой $f(x)$ непрерывна, функция представляется *интегралом Фурье*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(y)\cos(xy)+b(y)\sin(xy)]dy$$, где $$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(yt)dt$$ и $$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(yt)dt$$. В точках разрыва функции $f(x)$ имеет место равенство $$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\int_0^{+\infty}[a(y)\cos(xy)+b(y)\sin(xy)]dy$$.

В частности, если: **1)** функция $f(x)$ - *чётная*, то в точках непрерывности функции имеет место равенство $$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(y)\cos(xy)]dy$$, где $$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos(yt)dt$$; **2)** функция $f(x)$ - *нечётная*, то в точках непрерывности функции имеет место равенство $$f(x)=\int_0^{+\infty}[b(y)\sin(xy)]dy$$, где $$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin(yt)dt$$.

Если функция $f(x)$ задана только в интервале $(0,+\infty)$, то её можно продолжить в интервал $(-\infty, 0)$ либо как чётную, либо как нечётную, а затем представить её в интервале $(0, +\infty)$ неполным интегралом Фурье по синусам или по косинусам.

В задачах 8.211-8.216 представить в интервале $(-\infty, \infty)$ интегралом Фурье, следующие функции:

8.211 $f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<-1\\ 1 & -1\le x\le 1\\ 0 & 1<x<+\infty\end{cases}$. **8.212** $f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 1<x<+\infty\end{cases}$.

8.213 $f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$. **8.214** $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$.

8.215 $f(x)=\begin{cases}\sin x & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$.   **8.216** $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|\le\pi/2\\ 0 & |x|>\pi/2\end{cases}$.

В задачах 8.217-8.218 функцию $f(x)$ в интервале $(0,+\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжив её нечётным образом на интервал $(-\infty\ ,0)$.

8.217 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ 0 & 1<x<\infty\end{cases}$.   **8.218**
$f(x)=\begin{cases}2-3x & 0<x\le 2/3\\ 0 & 2/3<x<\infty\end{cases}$.

В задачах 8.219-8.220 функцию $f(x)$ в интервале $(0,+\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжив её чётным образом на интервал $(-\infty\ ,0)$.

8.219 $f(x)=\begin{cases}2x-3 & 0<x\le 3/2\\ 0 & 3/2<x<\infty\end{cases}$. **8.220**
$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x\le\pi\\ 0 & \pi<x<\infty\end{cases}$.